Séance 1 — 60 min environ, hors vérification. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier. Démonstrations au programme : théorèmes 2 et 5.

Page de garde — Partie 1 *2 min*

Anecdote Le texte chinois dit littéralement : « un voyage de mille *li* commence sous tes pieds ». Dans une suite arithmétique ou géométrique, chaque terme se déduit du précédent par un seul pas, toujours le même. *(Tao-tö-king, chap. 64)*

I. Définition *5 min*

Au tableau Deux colonnes, gardées tout le cours : 0 ; 2 ; 4 ; $6\ldots$ ($r=2$) et 100 ; 95 ; $90\ldots$ ($r=-5$) | 1 ; 2 ; 4 ; $8\ldots$ ($q=2$) et $1\,000$; 100 ; $10\ldots$ ($q=0{,}1$). Schémas fléchés $u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2$ et $u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2$.

Anecdote Les noms viennent des moyennes grecques, déjà définies par Archytas de Tarente : chaque terme d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique de ses voisins (7 entre 5 et 9) ; dans une suite géométrique à termes positifs, c'est la moyenne géométrique ($6^2 = 3\times 12$). *(Archytas, fragment cité par Porphyre ; Nicomaque de Gérase,* Introduction arithmétique*, livre II)*

Théorème 1 *3 min*

Au tableau « Si et seulement si » se lit dans les deux sens : arithmétique $\Rightarrow$ différence constante, et différence constante $\Rightarrow$ arithmétique. Termes non nuls : on ne divise pas par 0 (la suite 0 ; 0 ; $0\ldots$ vérifie $u_{n+1}=q\times u_n$ pour tout q).

Exemples 1 et 2 *6 min*

Au tableau **Ex. 1** : $u_{n+1}-u_n = 2(n+1)-3-(2n-3) = 2n+2-3-2n+3 = 2$: arithmétique de raison 2. Insister sur les parenthèses de $-(2n-3)$.

Ex. 2 : $u_n>0$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3\times 2^{n+1}}{3\times 2^n} = 2$ car $2^{n+1}=2^n\times 2$: géométrique de raison 2, $u_0 = 3\times 2^0 = 3$.

Exemple 3 — contre-exemple *4 min*

Au tableau $u_1 = 2\times 4-3 = 5$, $u_2 = 2\times 5-3 = 7$. Différences $1\neq 2$: pas arithmétique. Quotients $\frac{5}{4}=1{,}25 \neq \frac{7}{5}=1{,}4$: pas géométrique. Un contre-exemple suffit pour dire « non » ; trois termes ne suffisent jamais pour dire « oui ».

II. Terme général — Théorème 2 *3 min*

Au tableau De u_0 à u_n : n sauts « $+r$ », donc $u_n = u_0 + nr$; de u_1 à u_n : $n-1$ sauts. Même lecture avec n multiplications par q : $u_n = u_0\times q^n$.

Démonstration du théorème 2 (au programme) *4 min*

Au tableau Souligner l'argument : même terme initial et même relation de récurrence, donc même suite. On vérifie les deux conditions pour $v_n = u_0+nr$, puis pour $v_n = u_0\times q^n$.

Théorème 3 *2 min*

Au tableau $u_n = 4-3n$: arithmétique de raison -3 ; $u_n = 5\times 2^n$: géométrique de raison 2. Piège : $u_n = 3\times 2^{n+1} = 6\times 2^n$, donc $u_0=6$ et non 3.

Représentations graphiques *2 min*

Au tableau $u_n = 10+1{,}5n = f(n)$ avec $f(x)=1{,}5x+10$: la raison est le coefficient directeur. On ne relie pas les points : la suite n'est définie que pour $n\in\mathbb{N}$.

Anecdote En 1798, Malthus oppose les deux familles : la population croîtrait « selon une progression géométrique », les subsistances « seulement selon une progression arithmétique ». *(T. R. Malthus,* An Essay on the Principle of Population*, 1798)*

Exemples 4 et 5 — *5 min*

Au tableau **Ex. 4** : raison 5, $u_0 = -230$, donc $u_n = -230 + 5n$ (contrôle : $u_1 = -225$).
Ex. 5 : raison 2, $u_1 = 3$, donc $u_n = 3 \times 2^{n-1}$ et $u_{10} = 3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1\,536$ (calcul mental : $2^{10} = 1\,024$).

III. Sens de variation — Théorème 4 — *3 min*

Au tableau Si $u_0 < 0$, les sens s'inversent : -1 ; -2 ; $-4\ldots$ ($q = 2$) est décroissante. Pour $q < 0$: 1 ; -2 ; 4 ; $-8\ldots$ ni croissante ni décroissante.

Exemples 6 et 7 — *3 min*

Au tableau **Ex. 6** : $r = -3 < 0$: strictement décroissante (7 ; 4 ; 1 ; $-2\ldots$).
Ex. 7 : $q = \frac{1}{2}$, $u_0 = 4 > 0$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$: strictement décroissante (4 ; 2 ; 1 ; $0{,}5\ldots$).

IV. Modéliser une évolution — Propriété — *3 min*

Au tableau Hausse de $3\,\%$: $\times 1{,}03$; baisse de $20\,\%$: $\times 0{,}8$; hausse de $100\,\%$: $\times 2$. Ne pas confondre « $+20$ € par an » (arithmétique, $r = 20$) et « $+20\,\%$ par an » (géométrique, $q = 1{,}2$).

Exemple 8 — la voiture — *4 min*

Au tableau **1.** $u_{n+1} = 0{,}9 \times u_n$: géométrique de raison $0{,}9$. **2.** $u_n = 10\,000 \times 0{,}9^n$. **3.** $u_5 = 10\,000 \times 0{,}9^5 = 10\,000 \times 0{,}59049 = 5\,904{,}90$ €. En 5 ans, la voiture perd $4\,095{,}10$ € et non $5\,000$ € : les pertes diminuent ($1\,000$ €, puis 900 €, puis 810 €$\ldots$).

V. Somme de termes consécutifs — Théorème 5 — *1 min*

Au tableau $1 + 2 + \cdots + 10 = \dfrac{10 \times 11}{2} = 55$; $1 + 2 + 4 + 8 = \dfrac{1 - 2^4}{1 - 2} = \dfrac{-15}{-1} = 15$.

Démonstration du théorème 5 (au programme) — *4 min*

Au tableau Écrire la somme à l'endroit et à l'envers, colonne par colonne ; puis S_n et $q \times S_n$ décalée d'un cran : tout s'annule sauf 1 et $-q^{n+1}$.

Anecdote **[attestation incertaine]** Gauss, élève à Brunswick, aurait calculé en un instant la somme demandée à toute la classe. Le premier récit (Sartorius von Waltershausen, 1856) ne donne pas les nombres ; la version « de 1 à 100 » est apparue plus tard. *(W. Sartorius von Waltershausen,* Gauss zum Gedächtnis*, 1856 ; B. Hayes,* American Scientist*, 2006)*

Théorème 6 — *2 min*

Au tableau Nombre de termes de u_p à u_n : $n - p + 1$ (de u_0 à u_{100} : 101 termes, comme les piquets d'une clôture).

Anecdote La somme d'une progression géométrique est déjà démontrée par Euclide, vers 300 av. J.-C., sous forme de proportions. *(Euclide,* Éléments*, livre IX, proposition 35)*

Exemples 9 et 10 — *5 min*

Au tableau **Ex. 9** : $u_{100} = 250$; $\dfrac{(50 + 250) \times 101}{2} = 150 \times 101 = 15\,150$.
Ex. 10 : $\dfrac{1 - 3^5}{1 - 3} = \dfrac{1 - 243}{-2} = 121$; contrôle : $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$.

Anecdote Légende de Sessa : un grain sur la première case de l'échiquier, puis le double à chaque case, soit $1 + 2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$ grains. *(légende rapportée par Ibn Khallikân, XIII^e s.)*